4. Baza i dimenzije

(4.01) Baza

Linearno nezavisan skup koji generiše vektorski prostor $\mathcal{V}$ zovemo <u>*baza*</u> za $\mathcal{V}$. $\diamond$

(4.02) Karakterizacija baze

Neka je $\mathcal{V}$ podprostor od $\mathbb{R}^m$, i neka je $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, ..., \boldsymbol{b}_n\} \subseteq \mathcal{V}$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne.

- $\mathcal{B}$ je baza za $\mathcal{V}$.
- $\mathcal{B}$ je najmanji skup koji generiše $\mathcal{V}$.
- $\mathcal{B}$ je najveći linearno nezavisan podskup iz $\mathcal{V}$. $\diamond$

(4.03) Dimenzija

<u>*Dimenzija*</u> vektorskog prostora $\mathcal{V}$ je definisana sa

$$\begin{aligned}\dim \mathcal{V} &= \text{broj vektora u bilo kojoj bazi od } \mathcal{V}\\ &= \text{broj vektora u najmanjem skupu koji generiše } \mathcal{V}\\ &= \text{broj vektora u najvećem nezavisnom podskupu iz } \mathcal{V}.\end{aligned}$$

$\diamond$

(4.04) Dimenzije podprostora

Za vektorske prostore $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ takve da $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, sljedeće tvrdnje su tačne.

- $\dim \mathcal{M} \leq \dim \mathcal{N}$.
- Ako je $\dim \mathcal{M} = \dim \mathcal{N}$, tada je $\mathcal{M} = \mathcal{N}$. $\diamond$

(4.05) Fundamentalni podprostori - dimenzija i baze

Za $m \times n$ matricu realnih brojeva takvu da $rang(A) = r$,

- $\dim im(A) = r$,
- $\dim ker(A) = n - r$,
- $\dim im(A^\top) = r$,
- $\dim ker(A^\top) = m - r$.

Neka je P nesingularna matrica takva da je $PA = U$, gdje je U u red ešelon obliku, i neka je $\mathcal{H}$ skup od $\boldsymbol{h}_i$-ova koji se pojavljuju u opštem rješenju homogenog sistema $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

- Osnovne kolone u A formiraju bazu za $im(A)$.
- Nenula redovi od U formiraju bazu za $im(A^\top)$.
- Skup $\mathcal{H}$ je baza za $ker(A)$.
- Zadnjih $m - r$ redova od P formira bazu za $ker(A^\top)$.

Za matricu sa kompleksnim vrijednostima, tvrdnje iznad ostaju tačne ako $A^\top$ zamjenimo sa A^*. $\diamond$

(4.06) Slika plus jezgro teorem

- $\dim im(A) + \dim ker(A) = n$ za sve $m \times n$ matrice. $\diamond$

(4.07) Rang i povezanost

Neka je Γ graf koji sadrži m vrhova. Ako je Γ neorjentisan, proizvoljno dodjeljivanje strelica na ivice grafa napravit će od Γ-e orjentisan graf, i neka je E matrica incidencije dobijenog orjentisanog grafa.

- Γ je povezan graf ako i samo ako $rang(E) = m - 1$. $\diamond$

(4.08) Dimenzija sume

Ako su $\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$, tada

$$\dim(\mathcal{X} + \mathcal{Y}) = \dim \mathcal{X} + \dim \mathcal{Y} - \dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}).$$

$\diamond$

(ova stranica je ostavljena prazna)

(#) Neka je V podprostor od $\mathbb{R}^m$, i neka je $\mathcal{B}=\{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subseteq V$. Pokazati da, ako je $\mathcal{B}$ najmanji mogući skup koji generiše podprostor V tada je $\mathcal{B}$ baza za V.

Rj: Prisjetimo se: <u>Linearno nezavisan skup koji generiše vektorski prostor V zovemo baza za V.</u>

Iz postavke zadatka imamo $V = span(\mathcal{B})$. Trebamo još pokazati da je $\mathcal{B}$ linearno nezavisan skup.

Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da je $\mathcal{B}$ linearno zavisan skup. Tada postoji neki b_i koji se može napisati kao linearna kombinacija ostalih b-ova, i skup

$$\mathcal{B}' = \{b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n\}$$

bi i dalje generisao vektorski prostor V. Prema tome $\mathcal{B}'$ generiše V i ima manje elemenata od $\mathcal{B}$.

#kontradikcija
($\mathcal{B}$ je najmanji mogući skup koji generiše V).

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. $\mathcal{B}$ je baza za V.

(7) Neka je V podprostor od $\mathbb{R}^m$, i neka je $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subseteq V$. Pokazati da, ako je $\mathcal{B}$ najveći mogući linearno nezavisan podskup od V tada je $\mathcal{B}$ baza za V.

Rj.:

Linearno nezavisni skup koji generiše vektorski prostor V zovemo baza za V.

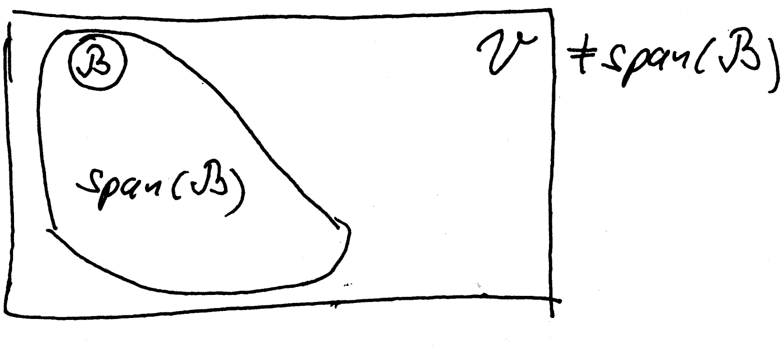
Ako je $\mathcal{B}$ najveći mogući linearno nezavisni podskup od V a nije baza za V ($\mathrm{span}(\mathcal{B}) \neq V$) tada postoji vektor $v \in V$ takav da $v \notin \mathrm{span}(\mathcal{B})$. Ovo znači da prošireni skup

$$\mathcal{B} \cup \{v\} = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, v\}$$

je linearno nezavisan (u suprotnom $\mathcal{B} \cup \{v\}$ lin. zav. $\Rightarrow \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ t.d. $v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \ldots + \alpha_n b_n \Rightarrow v \in \mathrm{span}(\mathcal{B})$)
#kontradikcija

Dobili smo da je $\mathcal{B} \cup \{v\}$ linearno nezavisan skup
#kontradikcija
($\mathcal{B}$ je najveći mogući lin. nez. podskup od V).

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $\mathcal{B}$ je baza za V.



ostavljeno za vježbu

(#) Ako je V n-dimenzionalan prostor, objasniti zašto svaki nezavisan podskup $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ koji sadrži n vektora mora biti baza za V.

Rj.

$\dim V$ = broj vektora u bilo kojoj bazi za V
= broj vektora u najmanjem skupu koji generiše V
= broj vektora u najveće mogućem nezavisnom podskupu od V

$\dim V = n$ znači da svaki podskup od V koji sadrži više od n vektora mora biti linearno zavisan. Prema tome S je najveći mogući nezavisni podskup od V.

Iz osnova teorije linearne algebre znamo da

$\mathcal{B}$ baza za V $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ je najmanji skup koji generiše V $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ je najveći mogući linearno nezav. podskup od V

S najveći mogući nezavisni podskup od V $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ S je baza za V

(#) Neka su M i N vektorski prostori takvi da $M \subseteq N$. Pokazati da je $\dim M \leq \dim N$.

Rj: Ako je V vektorski prostor iz osnova teorije Lineal. alg. znamo:

$\dim V$ = broj vektora u bilo kojoj bazi od V
= broj vektora u bilo kojem najvećem nezavisnom podskupu V

Pa neka je $\dim M = m$ i $\dim N = n$.

Pretpostavimo suprotno tvrdnji tj. pretpostavimo da je $m > n$.

$\dim M = m \Leftrightarrow$ vektorski prostor M ima bazu $\mathcal{B}$ koja sadrži m linearno nezavisnih vektora

Kako je $M \subseteq N$ to je i $\mathcal{B} \subseteq N \Rightarrow$

U vektorskom prostoru N postoji nezavisan podskup koji sadrži m elemenata

#kontradikcija

($\dim N = n \Leftrightarrow$ najveći nezavisan podskup u N sadrži n vektora)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome $m \leq n$ tj.

$$\dim M \leq \dim N$$

q.e.d.

(#) Neka su M i N vektorski prostori takvi da $M \subseteq N$. Ako je $\dim M = \dim N$ pokazati da je $M = N$.

Rj. Prisjetimo se:

$\dim V$ = broj vektora u bilo kojoj bazi od V

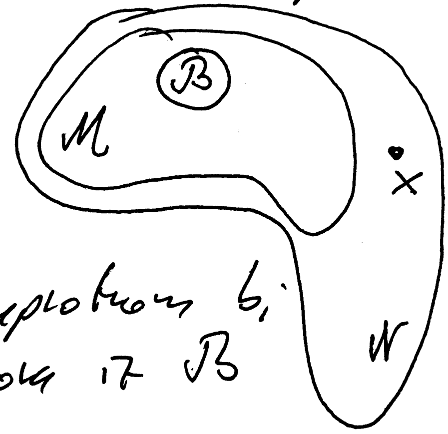
= broj vektora u najvećem nezavisnom podskupu od V

Pa neka je $\dim M = m$ i $\dim N = n$. (kako je $M \subseteq N$)

Ako bi bilo $m = n$ ali $M \neq N$ tada bi postojao vektor x takav da $x \in N$ ali $x \notin M$.

Ako je $\mathcal{B}$ baza za M tada $x \notin \operatorname{span}(\mathcal{B})$ i kako je $\mathcal{B} \subseteq M$ i $M \subseteq N$ to je prošireni skup

$$\mathcal{E} = \mathcal{B} \cup \{x\}$$



linearno nezavisan podskup od N.

($\mathcal{B} \cup \{x\}$ je linearno nezavisan, u suprotnom bi imali da je x linearna kombinacija vektora iz $\mathcal{B}$

$\Rightarrow$ $x \in \operatorname{span}(\mathcal{B})$
#kontradikcija)

Dobili smo da je $\mathcal{E}$ linearno nezavisan podskup od N
#kontradikcija

($\mathcal{E}$ ima $m+1 = n+1$ elemenat, a kako je $\dim N = n$ to znači da najveći nezavisni podskup od N ima tačno n elemenata)

Pretpostavka suprotna tvrdnji nas vodi u kontradikciju pa nije tačna. Prema tome mora biti $M = N$.

(#) Odrediti dimenziju i bazu prostora generisanog skupom $\mathcal{S}$ gdje je $\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}\right\}$.

Rj.
$$\operatorname{span}\mathcal{S}=\left\{\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}\;\middle|\;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}\right\}.$$

$\dim V$ = broj vektora u najvećem nezavisnom podskupu od V

Provjerimo da li je skup $\mathcal{S}$ linearno nezavisan skup, tj. provjerimo da li je jedino rješenje homogenog sistema

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

trivijalno rješenje. Dati sistem je ekvivalentan sa

$$A\alpha=\begin{bmatrix}1&1&5\\2&0&6\\1&2&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\mathbf{0}.$$

Sistem će imati jedinstveno rješenje akko $\operatorname{rang}(A)$ = broj nepozn.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&5\\2&0&6\\1&2&7\end{bmatrix}\underset{III_v-I_v}{\overset{II_v+I_v\cdot(-2)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&5\\0&-2&-4\\0&1&2\end{bmatrix}\overset{II_v:(-2)}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&5\\0&1&2\\0&1&2\end{bmatrix}\overset{III_v-II_v}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&5\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}\overset{I_v-II_v}{\sim}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{bmatrix}=E_A \Rightarrow \operatorname{rang}(A)=2$$

reducirani red ešelon oblik

Skup $\mathcal{S}$ nije linearno nezavisan tj. $\dim(\operatorname{span}(\mathcal{S}))<3$.

Iz matrice E_A možemo vidjeti da će prvi i drugi vektor iz $\mathcal{S}$ formirati linearno nezavisan skup, tj. skup $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$ je linearno nezavisan skup, tj. baza je $\mathcal{B}$.

Možemo zaključiti $\dim(\operatorname{span}(\mathcal{S}))=2$. (i ostale mogućnosti za bazu su također moguće)

#) Odrediti dimenziju prostora generisanog skupom $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\8\\-4\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\3\\0\\6\end{pmatrix}\right\}.$$

Rj. $\dim V$ = broj vektora u najvećem nezavisnom podskupu od V

$\operatorname{span}(\mathcal{S})$ = prostor generisan skupom $\mathcal{S}$

Provjerimo da li je $\mathcal{S}$ linearno nezavisan skup tj. da li je jedino rješenje homogenog sistema

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2\\8\\-4\\8\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_5\begin{pmatrix}3\\3\\0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

trivijalno rješenje. Dati sistem je ekvivalentan sa

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&2&1&3\\2&0&8&1&3\\-1&0&-4&1&0\\3&2&8&1&6\end{bmatrix}}_{=A}\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\end{bmatrix}}_{\alpha}=\underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}}_{=\mathbf{0}}$$ tj. sa $A\alpha=\mathbf{0}$

Sistem će imati jedinstveno rješenje akko rang(A) = broj nepozn.

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&1&3\\2&0&8&1&3\\-1&0&-4&1&0\\3&2&8&1&6\end{bmatrix}\underset{IV_v+I_v\cdot(-3)}{\overset{II_v+I_v\cdot(-2)}{\underset{III_v+I_v}{\sim}}}\begin{bmatrix}1&1&2&1&3\\0&-2&4&-1&-3\\0&1&-2&2&3\\0&-1&2&-2&-3\end{bmatrix}\overset{II_v\leftrightarrow III_v}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&2&1&3\\0&1&-2&2&3\\0&-2&4&-1&-3\\0&-1&2&-2&-3\end{bmatrix}$$

$$\underset{IV_v+II_v}{\overset{III_v+II_v\cdot 2}{\sim}}\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&2&1&3\\0&1&-2&2&3\\0&0&0&3&3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}}_{=E}\Rightarrow \text{rang}(A)=3\Rightarrow$$ Skup $\mathcal{S}$ je linearno zavisan.

Iz matrice E možemo vidjeti je skup koji sadrži prvi drugi i četvrti vektor iz $\mathcal{S}$ tj. skup $\mathcal{S}_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ linearno nezavisan skup. Iz matrice E također vidimo da skup span$\mathcal{S}$ ne može imati dimenziju 4.

Dimenzija prostora generisanog skupom $\mathcal{S}$ je 3.

(#) Odrediti dimenziju od četri fundamentalna podrostora pridruženih matrici $A=\begin{bmatrix}1&2&2&3\\2&4&1&3\\3&6&1&4\end{bmatrix}$.

Rj. Iz osnovne teorije linearne algebre znamo:

Ako je A $m\times n$ matrica za koju vrijedi $rang(A)=r$ tada

$\dim(im(A))=r$ $\qquad$ $\dim(im(A^T))=r$

$\dim(ker(A))=n-r$ $\qquad$ $\dim(ker(A^T))=m-r$

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&3\\2&4&1&3\\3&6&1&4\end{bmatrix}\underset{III_v+I_v\cdot(-3)}{\overset{II_v+I_v\cdot(-2)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&2&3\\0&0&-3&-3\\0&0&-5&-5\end{bmatrix}\underset{III_v:(-5)}{\overset{II_v:(-3)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&2&3\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\overset{III_v-II_v}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&2&3\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}_{3\times4}\overset{rang(A)=2}{\Longrightarrow}$$

$\dim(ker(A))=4-2=2$

$\dim(im(A))=2$

$\dim(im(A^T))=2$

$\dim(ker(A^T))=3-2=1$

Od ranije znamo
- osnovne kolone od A formiraju bazu za $im(A)$
- nenula redovi od U formiraju bazu za $im(A^T)$

(#) Odrediti dimenziju svakog od sljedećih vektorskih prostora
(a) prostor polinoma koji imaju stepen n ili manje
(b) prostor $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ svih $m\times n$ matrica
(c) prostor $n\times n$ simetričnih matrica

R: $\dim V$ = broj vektora u najvećem nezavisnom podskupu od V

a) Prostor polinoma koji imaju stepen n ili manje je oblika

$$P_n[x] = \{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \mid a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$$

Posmatrajmo skup polinoma $\{1, x, x^2, \dots, x^{n-1}, x^n\}$. Da li je ovo linearno nezavisan skup? Drugim riječima da li postoje koeficijenti $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ takvi da jednakost

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \alpha_n x^n = 0$$

vrijedi za svako $x \in \mathbb{R}$?
(Prisjetimo se polinom n-tog stepena može imati najviše n korijena)
Prema tome skup $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ je linearno nezavisan.
Da li je ovo najveći linearno nezavisni podskup skupa svih polinoma stepena n ili manje?
Primjetimo da za proizvoljan polinom $g(x) \in P_n[x]$ imamo da

$$g(x) \in \operatorname{span}\{1, x, \dots, x^n\}$$

$$\dim(P_n[x]) = n+1.$$

b) Posmatrajmo sljedeći skup od $m\cdot n$ matrica

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \dots \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Da li je ovaj skup linearno nezavisan?
Ako posmatramo sistem

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} + \cdots + \alpha_{mn} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

nije teško vidjeti da je jedino rješenje ovog sistema trivijalno rješenje.
Iz datog skupa se odmah vidi da ne postoji veći linearno nezavisni podskup od $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$.

$$\dim(Mat_{m\times n}(\mathbb{R})) = m \cdot n$$

c) Svaku simetričnu matricu određuju elementi ispod ili iznad glavne dijagonale. Posmatrajmo skup

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \ldots \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ovaj skup ima

$$n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

elemenata. Nije teško vidjeti da je ovo najveći linearno nezavisni podskup skupa svih simetričnih matrica.

$$\dim(\text{prostora svih } n\times n \text{ simetričnih matrica}) = \frac{n^2+n}{2}$$

(#) Posmatrajmo sljedeću matricu i kolona vektor

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&0&5\\2&4&3&1&8\\3&6&1&5&5\end{bmatrix} \quad i \quad v=\begin{bmatrix}-8\\1\\3\\3\\0\end{bmatrix}.$$

Provjeriti da li $v\in ker(A)$, pa onda proširiti $\{v\}$ do baze za $ker(A)$.

Rj. $ker(A)=\{x \mid Ax=0\}$

Kako je $Av=\begin{bmatrix}1&2&2&0&5\\2&4&3&1&8\\3&6&1&5&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-8\\1\\3\\3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ to $v\in ker(A)$.

Pronađimo prvo bazu za $ker(A)$. Posmatrajmo sistem $Ax=0$.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&0&5\\2&4&3&1&8\\3&6&1&5&5\end{bmatrix}\underset{III_v+I_v\cdot(-3)}{\overset{II_v+I_v\cdot(-2)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&2&0&5\\0&0&-1&1&-2\\0&0&-5&5&-10\end{bmatrix}\overset{III_v:(-5)}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&2&0&5\\0&0&-1&1&-2\\0&0&1&-1&2\end{bmatrix}$$

$$\overset{III_v+II_v}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&2&0&5\\0&0&-1&1&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix} \Rightarrow rang\,A=2 \Rightarrow \begin{array}{l}x_1+2x_2+2x_3+\quad +5x_5=0\\ \quad -x_3+x_4-2x_5=0\end{array}$$

$5-2=3$ nepoznate uzimamo proizvoljno

$x_4=s,\ x_5=t \Rightarrow x_3=x_4-2x_5=s-2t$

$x_2=u$

$\Rightarrow x_1=-2u-2(s-2t)-5t=-2u-2s-t$

Rješenje homogenog sistema je

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2u-2s-t\\u\\s-2t\\s\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2u\\u\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2s\\0\\s\\s\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-t\\0\\-2t\\0\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}u+\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\\0\\-1\end{bmatrix}t$$

Jedna od baza za $ker(A)$ je $\left\{\begin{bmatrix}-2\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\\0\\-1\end{bmatrix}\right\}.$

Posmatrajmo sad matricu B

$$B = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

u kojoj je prva kolona vektor $\vec{v}$ a ostale tri kolone su baza od $\ker(A)$.

Primjetimo da je $im(B) = \ker(A)$ (ZAŠTO: $im(B)$ = prostor generisan pomoću kolona matrice B)

Od ranije znamo

<u>osnovne kolone u B generišu $im(B)$.</u>

(primjetimo da će $\begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ biti osnovna kolona u B).

$$B = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\mathrm{I}_v : 8}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{\mathrm{III}_v + \mathrm{I}_v \cdot 3 \\ \mathrm{IV}_v + \mathrm{I}_v \cdot 3}}{\overset{\mathrm{II}_v + \mathrm{I}_v}{\sim}} \begin{bmatrix} -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 3/4 & -1/4 & -1/8 \\ 0 & -3/4 & 1/4 & -13/8 \\ 0 & -3/4 & 1/4 & -3/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\mathrm{IV}_v + \mathrm{II}_v}{\overset{\mathrm{III}_v + \mathrm{II}_v}{\sim}} \begin{bmatrix} -1 & -1/4 & -1/4 & -1/8 \\ 0 & 3/4 & -1/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 0 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\mathrm{IV}_v \cdot (-2)}{\overset{\mathrm{III}_v \cdot \frac{2}{5}}{\sim}} \begin{bmatrix} -1 & -1/4 & -1/4 & -1/8 \\ 0 & 3/4 & -1/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\mathrm{V}_v + \mathrm{III}_v}{\overset{\mathrm{IV}_v + \mathrm{III}_v}{\sim}} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & -1/4 & -1/4 & -1/8 \\ 0 & \boxed{3/4} & -1/4 & -1/8 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Osnovne kolone u B su $\begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ i one generišu $im(B)$

Skup $\{\vec{v}\}$ proširen do baze za $\ker(A)$ je

$$\left\{ \begin{bmatrix} -8 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(#) Odrediti da li je skup $\mathcal{B}=\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

baza prostora generisanog skupom $\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\8\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}\right\}$.

Rj.

$$\operatorname{span}\mathcal{B}=\left\{\alpha_1\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\,\middle|\,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}2&1\\3&1\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{bmatrix}\,\middle|\,\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\{B\alpha\mid\alpha\in\mathbb{R}^2\}=\operatorname{im}(B)$$

$$\operatorname{span}\mathcal{A}=\left\{\alpha_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}5\\8\\7\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}\,\middle|\,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\{A\alpha\mid\alpha\in\mathbb{R}^3\}=\operatorname{im}(A)\quad\text{gdje je}\quad A=\begin{bmatrix}1&5&3\\2&8&4\\3&7&1\end{bmatrix}$$

Prema tome $\operatorname{span}(\mathcal{B})=\operatorname{im}(B)$ i $\operatorname{span}(\mathcal{A})=\operatorname{im}(A)$.

Ako vektore iz $\mathcal{B}$ postavimo kao redove matrice M i vektore iz $\mathcal{A}$ postavimo kao redove matric N imaćemo

$$M=\begin{bmatrix}1&2&3\\5&8&7\\3&4&1\end{bmatrix},\qquad N=\begin{bmatrix}2&3&2\\1&1&-1\end{bmatrix}\quad\text{i}$$

$$\operatorname{span}(\mathcal{B})=\operatorname{im}(M^T)\quad\text{i}\quad\operatorname{span}(\mathcal{A})=(N^T).$$

Od ranije znamo

$$\underline{\operatorname{im}(M^T)=\operatorname{im}(N^T)\quad\text{akko}\quad M\overset{red}{\sim}N}$$

$$M=\begin{bmatrix}1&2&3\\5&8&7\\3&4&1\end{bmatrix}\underset{III_v+I_v\cdot(-3)}{\overset{II_v+I_v\cdot(-5)}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&-8\\0&-2&-8\end{bmatrix}\overset{III_v-II_v}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&-8\\0&0&0\end{bmatrix}\overset{II_v:(-2)}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&0&0\end{bmatrix}\overset{I_v+II_v\cdot(-2)}{\sim}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&-5\\0&1&4\\0&0&0\end{bmatrix}=E_M\quad\text{reducirana red ešelon matrica matrice } M$$

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{I_v \leftrightarrow II_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \overset{II_v + I_v \cdot (-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \overset{I_v - II_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = E_N$$

Kako se nenula redovi u E_N i E_M poklapaju to je $im(M^T) = im(N^T)$ a time možemo zaključiti da je $span(\mathcal{A}) = span(\mathcal{B})$ tj. skup $\mathcal{B}$ je baza prostora generisanog skupom $\mathcal{A}$.

(Nije teško pokazati da $span(\mathcal{B})$ ima dimenziju 2).

(#) Neka je $\mathcal{B}=\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ baza za vektorski prostor V. Pokazati da se svaki $v \in V$ može izraziti kao linearna kombinacija od b_i-ova

$$v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$$

na samo jedan način – tj. <u>koordinate</u> α_i su jedinstvene.

Rj.

<u>Linearno nezavisan skup koji generiše vektorski prostor V zovemo baza za V.</u>

Kako $\mathcal{B}$ generiše V to za $\forall v \in V$ $\exists \alpha_i \in \mathbb{R}$ $i=1,2,\dots,n$ t.d. $v=\alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n$.

Pokažimo da je prikaz jedinstven. Ako bi postojali koeficijenti $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ t.d.

$$v = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_n b_n$$

imali bi

$$0 = v - v = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \dots + \alpha_n b_n - (\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_n b_n) =$$

$$= (\alpha_1 - \beta_1) b_1 + (\alpha_2 - \beta_2) b_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) b_n$$

a kako je $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ linearno nezavisan skup, gornja homogena jednačina je tačna akko

$$\alpha_i - \beta_i = 0 \text{ za svaki } i=1,2,\dots,n, \text{ tj. } \alpha_i = \beta_i.$$

Prema tome koordinate α_i su jedinstvene.

(#) Konstruisati 4×4 homogeni sistem jednačina koji nema nula koeficijente i koji ima tri linearno nezavisna rješenja.

Rj. Homogeni sistem jednačina koje tražimo će biti oblika

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0$$
$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = 0$$

ili u matričnom obliku

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Prisjetimo se $\ker(A) = \{x \mid Ax = 0\}$

Ako je $\dim(\ker(A)) = 1$ sistem će imati jedno linearno nezavisno rješenje.

Sistem će imati tri linearno nezavisna rješenja akko $\dim(\ker(A)) = 3$.

Iz osnovne teorije linearne algebre znamo

$$\underline{\operatorname{rang}(A) = r \Rightarrow \dim(\operatorname{im}(A)) = r, \quad \dim(\ker(A)) = n - r}$$

gdje je $A_{m \times n}$

Sad imamo

$$3 = \dim(\ker(A)) = n - r = 4 - \operatorname{rang}(A) \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 1$$

Prema tome bilo koja matrica ranga jedan sa ne nula elementima će biti rješenje (npr. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$)

(#) Ako je $\mathcal{S}_r = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ linearno nezavisan podskup n-dimenzionalnog prostora $\mathcal{V}$, gdje je $r < n$, objasniti zašto je moguće pronaći dodatne vektore $\{v_{r+1}, \dots, v_r\}$ iz $\mathcal{V}$ takve da je

$$\mathcal{S}_n = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$$

baza za $\mathcal{V}$.

Rj. Linearno nezavisan skup koji generiše vektorski prostor $\mathcal{V}$ zovemo **baza** za $\mathcal{V}$.

$\dim \mathcal{V}$ = broj vektora u bilo kojoj bazi za $\mathcal{V}$

Kako je $r < n$ i $\dim(\mathcal{V}) = n$ to znači $\text{span}(\mathcal{S}_r) \neq \mathcal{V}$, pa postoji vektor $v_{r+1} \in \mathcal{V}$ takav da $v_{r+1} \notin \text{span}(\mathcal{S}_r)$. Prošireni skup $\mathcal{S}_{r+1} = \mathcal{S}_r \cup \{v_{r+1}\}$ je nezavisan podskup od $\mathcal{V}$ (u suprotnom $\mathcal{S}_r \cup \{v_{r+1}\}$ bi bio zavisan skup pa $\exists \alpha_i$ t.d. $v_{r+1} = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r \Rightarrow v_{r+1} \in \text{span}(\mathcal{S}_r)$)
#kontradikcija

i $\mathcal{S}_{r+1}$ sadrži $r+1$ vektor. Ponavljajući ovaj proces generisaćemo nezavisne podskupove $\mathcal{S}_{r+2}, \mathcal{S}_{r+3}, \dots$ i na kraju doći do maksimalnog nezavisnog podskupa $\mathcal{S}_n \subseteq \mathcal{V}$ koji će sadržavati n vektora.

Proširiti nezavisan skup $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix} \right\}$ do baze prostora $\mathbb{R}^4$.

Rj: Znamo da je $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^4$ (ZAŠTO?). Sad posmatrajmo matricu A

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

u kojoj su prve dvije kolone vektori iz $\mathcal{S}$, a ostale kolone vektori iz baze od $\mathbb{R}^4$.

Jasno je da $im(A) = \mathcal{V}$ (ZAŠTO? $im(A)$ = prostor generisan pomoću kolona matrice A.)

Iz ranijih lekcija znamo

<u>osnovne kolone u A generišu $im(A)$</u>

Primetimo da će $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix} \right\}$ biti osnovne kolone u A zato što ni jedna od njih nije linearna kombinacija prethodnih. Prema tome, preostalih $4-2$ osnovnih kolona moraju biti podskup od $\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$.

(osnovne kolone od A su kolone u A koje sadrže pivot pozicije).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{IV_v + I_v \cdot (-2)}{\overset{III_v + I_v}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{II_v \leftrightarrow III_v}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{IV_v + II_v \cdot 2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \{A_{*1}, A_{*2}, A_{*4}, A_{*5}\}$$ su osnovne kolone u A

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$$ je baza za $\mathbb{R}^4$ koja sadrži $\mathcal{S}$.

(#) Za $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$ i podprostor $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ od ranije znamo da je slika $A(\mathcal{S}) = \{Ax \mid x \in \mathcal{S}\}$ od $\mathcal{S}$ pod A podprostor od $\mathbb{R}^m$. Pokazati da, ako je $\mathcal{S} \cap \ker(A) = \mathbf{0}$ tada je $\dim A(\mathcal{S}) = \dim(\mathcal{S})$.

Uputa: Iskoristiti bazu $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ za $\mathcal{S}$ da bi odredili bazu za $A(\mathcal{S})$.

Rj. Neka je $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ baza za $\mathcal{S}$. To znači da $\operatorname{span}\{s_1, s_2, \ldots, s_k\} = \mathcal{S}$ i skup $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ je linearno nezav.

Prvo pokažimo da je $\operatorname{span}\{As_1, As_2, \ldots, As_k\} = A(\mathcal{S})$.

$$x \in \operatorname{span}\{As_1, As_2, \ldots, As_k\} \Leftrightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} \text{ t.d. } x = \alpha_1 As_1 + \ldots + \alpha_k As_k$$

$$\Leftrightarrow \exists \alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R} \quad x = A(\alpha_1 s_1 + \ldots + \alpha_k s_k) \Leftrightarrow s = \alpha_1 s_1 + \ldots + \alpha_k s_k \in \mathcal{S}$$

za neke $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ t.d. $x = As \Leftrightarrow x \in A(\mathcal{S})$

Prema tome vrijedi $\operatorname{span}\{As_1, As_2, \ldots, As_k\} = A(\mathcal{S})$.

Pokažimo još da je skup $\{As_1, As_2, \ldots, As_k\}$ linearno nezavisan.

Posmatrajmo jednačinu
$$\alpha_1 As_1 + \alpha_2 As_2 + \ldots + \alpha_k As_k = 0$$
$$A\underbrace{(\alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_k s_k)}_{\in \mathcal{S} \text{ i } \in \ker(A)} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 s_1 + \alpha_2 s_2 + \ldots + \alpha_k s_k \in \mathcal{S} \cap \ker(A) = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 s_1 + \ldots + \alpha_k s_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$$

zato što je $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ liner. nezav.

Prema tome $\{As_1, As_2, \ldots, As_k\}$ je linearno nezavisan skup koji generiše $A(\mathcal{S}) \Rightarrow \{As_1, \ldots, As_k\}$ je baza za $A(\mathcal{S}) \Rightarrow \dim(A(\mathcal{S})) = k = \dim(\mathcal{S})$

q.e.d.

#) Pokazati da je $\text{rang}(A+B) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(B)$.

Rj.

$im(A) := \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n\}$. Pokažimo da je $im(A+B) \subseteq im(A) + im(B)$.

Izaberimo proizvoljan $b \in im(A+B)$. Tada postoji vektor x takav da

$$b = (A+B)x = Ax + Bx \in im(A) + im(B)$$

Prema tome $im(A+B) \subseteq im(A) + im(B)$.

Iz osnovne teorije Linearne algebre znamo da

$\mathcal{M}, \mathcal{N}$ vektorski prostori, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \Rightarrow \dim \mathcal{M} \leq \dim \mathcal{N}$

$\mathcal{X}$ i $\mathcal{Y}$ podprostori vektorskog prostora $\mathcal{V}$ $\Rightarrow \dim(\mathcal{X}+\mathcal{Y}) = \dim \mathcal{X} + \dim \mathcal{Y} - \dim(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y})$

Sad imamo

$$\text{rang}(A+B) = \dim\big(im(A+B)\big) \overset{im(A+B) \subseteq im(A) + im B}{\leq} \dim\big(im(A) + im(B)\big)$$
$$= \dim im(A) + \dim im(B) - \dim(im(A) \cap im(B))$$
$$\leq \dim im(A) + \dim im(B) = \text{rang}(A) + \text{rang}(B).$$

q.e.d.

Jasno je

$\dim im(A) = \text{rang}(A)$,

(#) Objasniti zašto je $|\text{rang}(A) - \text{rang}(B)| \leq \text{rang}(A-B)$.

Rj: U jednom od ranijih zadataka smo pokazali da

$$\underline{\text{rang}(A+B) \leq \text{rang}(A) + \text{rang}(B)}$$

Sad imamo

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A-B+B) \leq \text{rang}(A-B) + \text{rang}(B)$$

$$\Rightarrow \quad \text{rang}(A) - \text{rang}(B) \leq \text{rang}(A-B) \quad \ldots (*)$$

$$\text{rang}(B) = \text{rang}(B-A+A) \leq \text{rang}(B-A) + \text{rang}(A)$$

$$\Rightarrow \quad \text{rang}(B) - \text{rang}(A) \leq \text{rang}(B-A)$$

$$\Rightarrow \quad -(\text{rang}(A) - \text{rang}(B)) \leq \text{rang}(A-B) \quad \ldots (**)$$

$$(*) \text{ i } (**) \quad \Rightarrow \quad |\text{rang}(A) - \text{rang}(B)| \leq \text{rang}(A-B)$$

q.e.d.

od ranije znamo

$$\underline{\text{rang}(A) = r \quad \Leftrightarrow \quad \dim(\text{im}(A)) = r}$$

Ako je $\operatorname{rang}(A_{m\times n}) = r$ i $\operatorname{rang}(E_{m\times n}) = k \le r$ objasniti zašto

$$r-k \le \operatorname{rang}(A+E) \le r+k.$$

Drugim riječima, ovo kaže da nametanjem ranga k može promijeniti rang za najviše k.

Rj. U jednom od ranijih zadataka smo pokazali

$$\underline{\operatorname{rang}(A+B) \le \operatorname{rang}(A)+\operatorname{rang}(B)} \qquad \dots(\square)$$

isto tako smo pokazali da

$$\underline{|\operatorname{rang}(A)-\operatorname{rang}(B)| \le \operatorname{rang}(A-B)} \qquad \dots(\square\square)$$

Sad imamo

$$\operatorname{rang}(A+E) \overset{(\square)}{\le} \operatorname{rang}(A)+\operatorname{rang}(E) = r+k$$

$$\operatorname{rang}(A+E) = \operatorname{rang}(A-(-E)) \overset{(\square\square)}{\ge} \operatorname{rang}(A)-\operatorname{rang}(-E) = r-k$$

$$\Rightarrow \qquad r-k \le \operatorname{rang}(A+E) \le r+k$$

q.e.d.

(#) Objasniti zašto svaki nenula podprostor $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mora posjedovati bazu.

Rj.

Neka je V nenula podprostor. To znači da postoji vektor v_1 t.d. $v_1 \in V$.

Ako je $\text{span}\{v_1\} = V$ dokaz je završen.

Ako $\text{span}\{v_1\} \neq V$ to znači da $\exists v_2 \in V$ t.d. $v_2 \notin \text{span}\{v_1\}$. Skup $\{v_1, v_2\}$ je linearno nezavisan skup.

Ako je $\text{span}\{v_1, v_2\} = V$ dokaz je završen, $\{v_1, v_2\}$ je baza za V.

Ako je $\text{span}\{v_1, v_2\} \neq V$ tada $\exists v_3 \in V$ t.d. $v_3 \notin \text{span}\{v_1, v_2\}$

...

Nastavljajući ovaj proces, doći ćemo do nekog broja k t.d. $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ linearno nezavisan skup i da $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_k\} = V$. Drugim riječima $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ je baza za V.

Da se proces mora završiti garantuje dimenzija od $\mathbb{R}^n$

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$ = broj vektora u najvećem nezavisnom podskupu od V.

Zadaci za vježbu

1. Ako su M i N podskupovi prostora V, objasniti zašto $\dim(\operatorname{span}(M \cup N)) = \dim(\operatorname{span}(M)) + \dim(\operatorname{span}(N)) - \dim(\operatorname{span}(M) \cap \operatorname{span}(N))$.

2. Posmatrajmo dvije matrice $A_{m\times n}$ i $B_{m\times k}$.

(a) Objasniti zašto
$$\operatorname{rang}(A \mid B) = \operatorname{rang}(A) + \operatorname{rang}(B) - \dim(\operatorname{im}(A) \cap \operatorname{im}(B)).$$

(b) Objasniti zašto
$$\dim(\ker(A \mid B)) = \dim\ker(A) + \dim\ker(B) + \dim(\operatorname{im}(A) \cap \operatorname{im}(B))$$

(c) Odrediti $\dim(\operatorname{im}(C) \cap \ker(C))$ i $\dim(\operatorname{im}(C) + \ker(C))$ za
$$C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 & -5 & 3 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & -6 & 4 \end{bmatrix}.$$

3. Pretpostavimo da je matrica A sa m redova takva da sistem $Ax=b$ ima jedinstveno rješenje za svaki $b \in \mathbb{R}^m$. Objasniti zašto ovo znači da A mora biti kvadratna i nesingularna.

4. Neka je $\mathcal{S}$ skup rješenja za saglasan sistem linearnih jednačina $Ax=b$.

(a) Ako je $\mathcal{S}_{max} = \{s_1, s_2, \ldots, s_t\}$ najveći nezavisni podskup od $\mathcal{S}$, i ako je p bilo koje određeno rješenje, dokazati da
$$\operatorname{span}(\mathcal{S}_{max}) = \operatorname{span}\{p\} + \ker(A).$$

(b) Ako $b \neq 0$ i $\operatorname{rang}(A_{m\times n}) = r$, objasniti zašto $Ax=b$ ima $n-r+1$ "nezavisno rješenje".